

**Code-épreuve 030**

**MATHÉMATIQUES**

*L'usage de la calculatrice et du convertisseur est autorisé.*

Les résultats non justifiés par des explications mathématiques précises seront sans valeur.

*Les parties I, II et III sont indépendantes.*

**I**

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , on désigne par  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de la fonction numérique  $f$  de la variable réelle  $x$  définie par :

$$\begin{cases} f(x) = xe^{\frac{1}{x}} & \text{si } x < 0 \\ f(0) = 0 \\ f(x) = x^2 \ln \frac{1}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad \text{où } \ln \text{ désigne la fonction logarithme népérien.}$$

1. Préciser le domaine de définition de  $f$ , noté  $\mathcal{D}_f$ .
2. Étudier la continuité et la dérivabilité de  $f$  sur  $\mathcal{D}_f$  et déterminer sa dérivée  $f'$ . Pour la continuité et la dérivabilité, une étude particulière est demandée au point d'abscisse  $x = 0$ .
3. Calculer les limites de  $f$  aux bornes de  $\mathcal{D}_f$  et bâtir le tableau de variations de  $f$ .
4. Établir l'expression de la tangente à  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse  $x = 1$ .
5. Tracer la courbe  $\mathcal{C}$  en faisant apparaître les éléments qui facilitent sa construction (points particuliers, tangentes particulières...).
6. Discuter graphiquement du nombre de points d'intersection de la courbe  $\mathcal{C}$  avec les droites d'équation  $y = -x + \lambda$  où  $\lambda$  est un paramètre réel. Pour cette question, aucune étude analytique n'est demandée.
7. On considère la fonction numérique  $F$  de la variable réelle  $x$  définie par :

$$F(x) = \frac{x^3}{9} (1 - 3 \ln x).$$

**Tournez la page S.V.P.**

Vérifier que  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $]0; +\infty[$ . En déduire l'aire  $\mathcal{A}(\varepsilon)$  délimitée par la courbe  $\mathcal{C}$ , l'axe des abscisses et les droites d'équation «  $x = \varepsilon$  » et «  $x = 1$  » où  $\varepsilon$  est un réel tel que  $0 < \varepsilon < 1$ .

Que devient cette aire lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0 ?

## II

Au poker, une « main » est un ensemble de 5 cartes extraites d'un jeu de 32 cartes.

On rappelle que :

- les hauteurs sont : 7, 8, 9, 10, valet, dame, roi et as ;
- les couleurs sont : trèfle, carreau, cœur et pique.

1. Combien y a-t-il de mains possibles ?

2. Quelle est la probabilité d'obtenir chacune des mains suivantes :

- une quinte flush (cinq cartes de hauteurs consécutives et de même couleur) ;
- une quinte (cinq cartes de hauteurs consécutives mais pas toutes de même couleur) ;
- une couleur (cinq cartes non consécutives et de même couleur) ;
- un carré (quatre cartes de même hauteur) ;
- une main qui ne soit ni quinte flush, ni quinte, ni couleur, ni carré ?

## III

Le « jeu du joker » consiste à jeter simultanément sur un tapis deux dés identiques et parfaitement équilibrés. Ces deux dés ont l'aspect suivant :

- une face est marquée d'une étoile ;
- deux faces sont marquées d'un point ;
- les trois faces restantes sont vierges.

Pour chaque dé, le gain algébrique du joueur est obtenu de la façon suivante :

- si l'étoile sort, le joueur empoche une somme positive  $S$  (au moins égale à 4 €) ;
- si un point sort, le joueur perd 5 € ;
- si une face vierge sort, le joueur perd 1 €.

On désigne par  $G$  la variable aléatoire égale au gain total algébrique du joueur (obtenu en sommant les gains pour chacun des deux dés).

1. Préciser les valeurs que peut prendre la variable  $G$  et établir la loi de probabilité de  $G$ .

2. Quelle valeur faut-il donner à  $S$  pour que le jeu soit équitable ? Dans ce cas, quelle est la variance  $V(G)$  et l'écart-type  $\sigma(G)$  de la variable  $G$  ?